Μάθημα 17ο | 03/05/18

Αναλυτικές Συναρτήσεις

Σειρές: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ $(z_n) \subset \mathbb{C}$ $s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k \longrightarrow S := \sum_{n=1}^{\infty} z_n$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει στο $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{z_n}_{\in \mathbb{C}}$ συγκλίνει απόλυτα $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{|z_n|}_{\in [0,\infty) \subset \mathbb{R}} < +\infty$

- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ z_n μηδενική.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n + \mu w_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} w_n \xRightarrow{\lambda, \mu \in \mathbb{C}}$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

(Από εδώ και πέρα: $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty}$)

- $\sum |z_n| < +\infty \Rightarrow \sum z_n$

Γεωμετρική Σειρά (SOSARA)

- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ $\quad z \in D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

και μάλιστα απόλυτα

$\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$, $z \in D(0,1)$

Απόδ/ $\cdot\ S_n = 1 + \dots + z^n$

$(-)\ z\cdot S_n = z + \dots + z^{n+1}$

$S_n - zS_n = (1-z)S_n \overset{z\neq 1}{\Longrightarrow} S_n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} \underset{\alpha\nu\ |z|<1}{\overset{z^n \to 0}{\Longrightarrow}}$

$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{1-z}$

[η $\sum_0^\infty z^n$ αποκλίνει για $|z|\geq 1$ $\Rightarrow |z|^n \geq 1 \Rightarrow$ η (z^n) δεν είναι μηδενική]

Κριτήρια Σύγκλισης (SOS)

1) Κριτήριο Σύγκλισης α) $\sum |w_n| < +\infty$ και $|z_n| \leq |w_n|$ $\forall\, n \geq n_0 \Rightarrow \sum |z_n| < +\infty$ (συγκλίνει απόλυτα)

(απόδειξη με πληρότητα του $\mathbb{R}$ και τριγωνική ανισότητα μέσω ακολουθιών Cauchy (Άσκηση))

β) Αν $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z_n|}{|w_n|}$ και ανήκει στο $(0,+\infty)$ τότε:

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty$

(απόδειξη (β): $\dfrac{|z_n|}{|w_n|} \to \alpha \in (0,+\infty) \Rightarrow \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : |z_n| < (\alpha+1)|w_n|$

Συνεπώς: $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| < +\infty \Rightarrow \sum (\alpha+1)|w_n| \overset{(\alpha)}{\Longrightarrow} \sum |z_n| < +\infty$

Για το αντίστροφο το ίδιο με την $\dfrac{|w_n|}{|z_n|} \to \dfrac{1}{\alpha} \in (0,+\infty)$)

2) Κριτήριο Λόγου

Αν $\exists n_0$ έτσι ώστε $\forall n \geq n_0 : |z_n| \neq 0$ $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$

και αν $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ αποκλίνει

Απόδειξη: $\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < \alpha$ για $\alpha \in (0,1) \Rightarrow \exists$ υπακολουθία

$\frac{|z_{k_n+1}|}{|z_{k_n}|} \xrightarrow[\beta<\alpha]{} \beta \overset{!}{\Rightarrow} \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < \alpha$

[Αν αυτό δεν ίσχυε τότε θα υπήρχε υπακολουθία $\frac{|z_{\ell_n+1}|}{|z_{\ell_n}|} \geq \alpha$

$\Rightarrow$ τότε το $\limsup \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ δεν θα ήταν το $\beta < \alpha$, άτοπο]

Αφού $\alpha \in (0,1)$ έχουμε $\forall n \geq n_0 : \frac{|z_{n+1}|}{|z_{n_0}|} = \prod_{k=n_0}^{n} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} < \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^{n_0}}$

και $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1} < +\infty$, αφού $\alpha \in (0,1)$

$\liminf_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \beta > 1 \Rightarrow \exists$ υπακολουθία $\frac{|z_{k_n+1}|}{|z_{k_n}|} \to \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0\ \frac{|z_{k_n+1}|}{|z_{k_n}|} > \alpha > 1 \Rightarrow |z_{k_n+1}| > |z_{k_n}|$

Δηλαδή, η υπακολουθία $\left(\frac{z_{k_n+1}}{z_{k_n}}\right)$ δεν είναι μηδενική

$\Rightarrow$ η ακολουθία $\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)$ δεν είναι μηδενική.

3) Κριτήριο Ρίζας («Διαζευκτικό Κριτήριο»)

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ αποκλίνει.

[$\limsup < 1 \overset{!}{\Longrightarrow} \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 : \underbrace{\sqrt[n]{|z_n|} < a < 1}$

$\Leftrightarrow |z_n| < a^n$ και

$\sum_{n=1}^{\infty} a^n < +\infty$.

$\limsup > 1 \Rightarrow \exists$ υπακολουθία $|z_{k_n}| \geq a^{k_n}$ $a \geq 1$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ η (z_n) δεν είναι μηδενική]

Παράδειγμα

α) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{a} |z|^n < +\infty$, $a > 0$, $|z| < 1$ (Κριτήριο Λόγου)

β) Υπενθύμιση (Δες π.χ. Rudin θεωρ. 3.28, 3.23)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$, $p > 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, $p \leq 1$

4.9 Δυναμοσειρές

$\boxed{\text{Ορισμός}}$ (*) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με κέντρο $a \in \mathbb{C}$ και συντελεστές $(c_n) \subset \mathbb{C}$

Η (*) είναι σειρά συναρτήσεων για τις $f_n(z) := c_n (z-a)^n$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ η οποία (η *) ορίζει μια συνάρτηση $f : D \to \mathbb{C}$
$D := \{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει $\}$

π.χ. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in D$

Η f λέγεται (κατά σημείο) όριο της

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$ και η (*) λέγεται ανάπτυγμα της f

Παράδειγμα 1) Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ είναι δυναμοσειρά με κέντρο $a=0$ συντελεστές $c_n=1, \forall n\in\mathbb{N}$ και ορίζει στο $D(0,1)$ το κατά σημείο όριο της $f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty} z^n,\ z\in D(0,1)$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ είναι το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $f(z)=\frac{1}{1-z}$ (ορίζεται για $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$)

2) Αν $(c_n)\subset\mathbb{C}$ φραγμένη τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ συγκλίνει στο $D(0,1)$

(Κριτήριο Σύγκρισης): $|c_n|\leq M \Rightarrow |c_n||z|^n \leq M|z|^n$ και

$M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|z|^n<+\infty$ για $z\in D(0,1)$. Επίσης πάλι για $(c_n)\subset\mathbb{C}$ φραγμένη η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$ συγκλίνει σε όλο το $\mathbb{C}$. [Κριτήριο Λόγου: $\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|z|^n}=\frac{|z|}{n+1}\longrightarrow 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}<+\infty$ και κριτήριο σύγκρισης:

: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n||z|^n}{n!}<+\infty\ \forall z\in\mathbb{C}$ αν $|c_n|\leq M\ \forall n\in\mathbb{N}$]

$\boxed{\text{Ορισμός}}$ α) Έστω $D\subset\mathbb{C}$, $f_n: D\longrightarrow\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$.

Η (f_n) <u>συγκλίνει</u> <u>ομοιόμορφα</u> στην $f: D\longrightarrow\mathbb{C}$

αν $\|f_n-f\|:=\sup_{z\in D}|f_n(z)-f(z)|\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

β) Η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Θεώρημα.

α) $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow$ $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο
δηλαδή $\forall\ z \in D$ $\ f_n(z) \longrightarrow f(z)$

β) Κριτήριο Cauchy
f_n συγκλίνει ομοιόμορφα $\Leftrightarrow$ (f_n) είναι ακολουθία Cauchy,
δηλαδή $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}: \forall\ n,m \geq n_0\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon$

γ) Κριτήριο Weierstrass

$$\|f_n\| := \sup_{z \in D} |f_n(z)| \leq M_n \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα}$$

[Από το (β) Άσκηση]

δ)

f_n συνεχείς και $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f συνεχής